ROZWIĄZANIA I ODPOWIEDZI

Zadanie A1.

a) $$\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx = \left|\begin{matrix} t = 1+\cos^2 x \\ dt = 2\cos x\,(-\sin x)dx \\ dt = -\sin 2x\,dx \\ -dt = \sin 2x\,dx \end{matrix}\right| = -\int \frac{1}{t}dt = -\ln|t| + C =$$

$$= -\ln|1+\cos^2 x| + C\ .$$

b) $$\int x^2\cdot\sin(x+3)\,dx = \left|\begin{matrix} t = x+3 \to x = t-3 \\ dt = dx \end{matrix}\right| = \int (t-3)^2\cdot\sin t\,dt =$$

$$= \int (t^2-6t+9)\cdot\sin t\,dt = \int t^2\cdot\sin t\,dt - 6\int t\cdot\sin t\,dt + 9\int\sin t\,dt\ .$$

Obliczamy teraz pierwszą całkę:

$$\int t^2\cdot\sin t\,dt = \left|\begin{matrix} f(t)=t^2 & g'(t)=\sin t \\ f'(t)=2t & g(t)=-\cos t \end{matrix}\right| = -t^2\cos t + 2\int t\cos t\ dt =$$

$$= \left|\begin{matrix} f(t)=t & g'(t)=\cos t \\ f'(t)=1 & g(t)=\sin t \end{matrix}\right| = -t^2\cos t + 2\left(t\sin t - \int \sin t\,dt\right) =$$

$$= -t^2\cos t + 2(t\sin t + \cos t) + C_1\ ;$$

a następnie drugą całkę:

$$\int t\cdot\sin t\,dt = \left|\begin{matrix} f(t)=t & g'(t)=\sin t \\ f'(t)=1 & g(t)=-\cos t \end{matrix}\right| = -t\cos t + \int\cos t\ dt =$$

$$= -t\cos t + \sin t + C_2\ .$$

A więc:

$$\int x^2\cdot\sin(x+3)\,dx = -t^2\cos t + 2(t\sin t+\cos t) - 6(-t\cos t+\sin t) - 9\cos t + C =$$

$$= -t^2\cos t + 2t\sin t + 6t\cos t - 7\cos t - 6\sin t + C =$$

$$= -(x+3)^2\cos(x+3) + 2(x+3)\sin(x+3) + 6(x+3)\cos(x+3) - 7\cos(x+3) +$$

$$-6\sin(x+3) + C = (2-x^2)\cos(x+3) + 2x\sin(x+3) + C\ .$$

Zadanie A2.

a) $$\int_0^2 (x-|x-1|)\ dx = \int_0^1 (x-|x-1|)\ dx + \int_1^2 (x-|x-1|)\ dx =$$

$$= \int_0^1 [x-(-x+1)]\ dx + \int_1^2 [x-(x-1)]\ dx =$$

$$= \int_0^1 (2x-1)\ dx + \int_1^2 dx = [x^2-x]_0^1 + [x]_1^2 = 1 \ .$$

b) $$\int_0^1 x \cdot 2^{3x^2-1}\, dx = \left| \begin{array}{c} t = 3x^2-1 \\ dt = 6xdx \\ \frac{1}{6}dt = xdx \\ x=0 \to t=-1 \\ x=1 \to t=2 \end{array} \right| = \frac{1}{6}\int_{-1}^2 2^t\, dt = \frac{1}{6\ln 2}[2^t]_{-1}^2 = \frac{1}{6\ln 2}\left(4-\frac{1}{2}\right) =$$

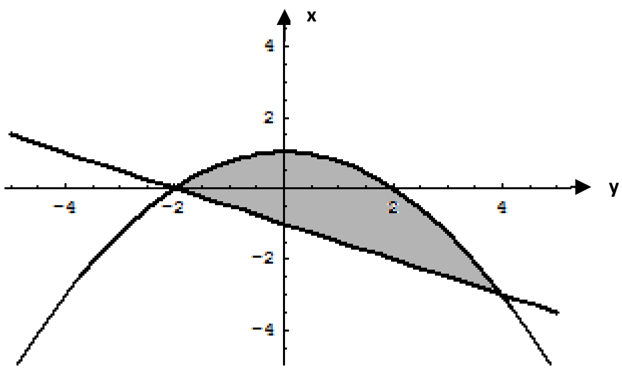
$$= \frac{7}{12\ln 2} \ .$$

Zadanie A3. Przechodzimy do układu YOX:

$$y^2 = -4(x-1) \to y^2 = -4x+4 \to x = \frac{4-y^2}{4} \ ,$$

$$2x+y+2=0 \to x = -\frac{y+2}{2} \ ,$$

a następnie robimy rysunek:



Rozwiązujemy układ równań: $\begin{cases} x = \frac{4-y^2}{4} \\ x = -\frac{y+2}{2} \end{cases}$, skąd $\frac{4-y^2}{4} = -\frac{y+2}{2}$, czyli $y^2-2y-8=0$,

skąd otrzymujemy: $y=-2$ lub $y=4$.

Obliczamy pole obszaru:

$$S = \int_{-2}^4 \left(\frac{4-y^2}{4} + \frac{y+2}{2}\right) dy = \int_{-2}^4 \left(2+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{4}\right) dy = \left[2y + \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{12}\right]_{-2}^4 = 9 \ .$$

Zadanie A4.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^4)^6}\, dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x^3}{(1+x^4)^6}\, dx + \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^4)^6}\, dx \ .$$

Obliczmy najpierw całkę nieoznaczoną:

$$\int \frac{x^3}{(1+x^4)^6}dx = \begin{vmatrix} t = 1 + x^4 \\ dt = 4x^3 dx \\ \frac{1}{4}dt = x^3 dx \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{1}{t^6}dt = \frac{1}{4}\int t^{-6}\,dt = -\frac{1}{20t^5} + C =$$

$= -\frac{1}{20(1+x^4)^5} + C$.

a) Badamy zbieżność pierwszej z całek po prawej stronie:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{(1+x^4)^6}\,dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0} \frac{x^3}{(1+x^4)^6}\,dx = \lim_{A\to-\infty}\left[-\frac{1}{20(1+x^4)^5}\right]_A^0 =$$

$= \lim_{A\to-\infty}\left(-\frac{1}{20} + \frac{1}{20(1+A^4)^5}\right) = -\frac{1}{20}$,

a więc $\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3}{(1+x^4)^6}\,dx = -\frac{1}{20}$ (całka jest zbieżna).

b) Badamy zbieżność drugiej z całek po prawej stronie:

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^4)^6}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int_{0}^{A} \frac{x^3}{(1+x^4)^6}\,dx = \lim_{A\to+\infty}\left[-\frac{1}{20(1+x^4)^5}\right]_0^A =$$

$= \lim_{A\to-\infty}\left(-\frac{1}{20(1+A^4)^5} + \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{20}$,

a więc $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^4)^6}\,dx = \frac{1}{20}$ (całka jest zbieżna).

c) Zatem:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{(1+x^4)^6}\,dx = -\frac{1}{20} + \frac{1}{20} = 0 \text{ (całka jest zbieżna).}$$

Zadanie A5. Zauważmy najpierw, że jeżeli $F(x) = \int_x^2 \mathrm{ctg}^2 t\ dt$, to $F'(x) = -\mathrm{ctg}^2 x$, zatem mamy:

$$f'(x) = (\mathrm{tg}^2 x)' \cdot \int_x^2 \mathrm{ctg}^2 t\ dt + \mathrm{tg}^2 x \cdot \left(\int_x^2 \mathrm{ctg}^2 t\ dt\right)' =$$

$$= 2\,\mathrm{tg}\,x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \int_x^2 \mathrm{ctg}^2 t\ dt + \mathrm{tg}^2 x \cdot (-\mathrm{ctg}^2 x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \cdot \int_x^2 \mathrm{ctg}^2 t\ dt - 1 \ .$$

Zadanie A6. Wykorzystamy funkcję: $z(x,y) = \sqrt[3]{x^2 - y^3} = (x^2 - y^3)^{1/3}$.

Mamy:

$$x_0 = 3\ ,\ \ \Delta x = 0{,}02\ ,\ y_0 = 1\ ,\ \ \Delta y = -0{,}01\ ,$$

$$z_x = \frac{1}{3}(x^2 - y^3)^{-2/3} \cdot 2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-y^3)^2}}\ ,\ z_y = \frac{1}{3}(x^2 - y^3)^{-2/3} \cdot (-3y^2) = -\frac{3y^2}{3\sqrt[3]{(x^2-y^3)^2}}\,,$$

$$dz(x,y) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2-y^3)^2}} \cdot (2x\Delta x - 3y^2\Delta y) \ .$$

Obliczamy:

$z(x_0, y_0) = z(3,1) = \sqrt[3]{3^2 - 1^3} = 2$,

$dz(x_0, y_0) = dz(3,1) = \frac{1}{3 \cdot 2}(2 \cdot 3 \cdot 0{,}02 - 3 \cdot 1 \cdot 0{,}01) = 0{,}015$.

Zatem: $\sqrt[3]{(3{,}02)^2 - (0{,}99)^3} \approx 2 + 0{,}015 = 2{,}015$.

Zadanie A7. Ponieważ $z_{xy} = z_{yx}$, więc tezę możemy zapisać w postaci:

$$-2y \cdot z_{yy} = x \cdot z_{yx} \ ,$$

co uprości rachunki.

Dla funkcji $z = x^2 \cdot \ln(xy^2)$ mamy:

$$z_y = [x^2 \cdot \ln(xy^2)]_y = x^2 \cdot [\ln(xy^2)]_y = x^2 \cdot \frac{1}{xy^2} \cdot x \cdot 2y = \frac{2x^2}{y} \ ,$$

$$z_{yx} = \left(\frac{2x^2}{y}\right)_x = \frac{2}{y} \cdot 2x = \frac{4x}{y}, \ z_{yy} = \left(\frac{2x^2}{y}\right)_y = 2x^2 \cdot \left(\frac{1}{y}\right)_y = 2x^2 \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{2x^2}{y^2} \ .$$

Obliczamy obie strony tezy:

$$L_{str.} = -2y \cdot z_{yy} = -2y \cdot \left(-\frac{2x^2}{y^2}\right) = \frac{4x^2}{y}, \qquad P_{str.} = x \cdot z_{yx} = x \cdot \frac{4x}{y} = \frac{4x^2}{y} \ .$$

Ponieważ $L_{str.} = P_{str.}$, więc badana równość zachodzi.

Zadanie A8. Przekształćmy dane równanie:

$$(2x^2y + 2y^2 - 1)dy = 2xdx \quad ||: dx$$

$$(2x^2y + 2y^2 - 1)y' = 2x \ .$$

Obliczamy pochodną funkcji uwikłanej, danej równaniem $y^2 - \ln(x^2 + y) = C$. Przyjmijmy w tym celu $y = y(x)$. Otrzymujemy:

$$([y(x)]^2 - \ln[x^2 + y(x)])' = (C)'$$

$$2y(x)y'(x) - \frac{1}{x^2 + y(x)} \cdot [2x + y'(x)] = 0.$$

Zapisujemy ostatnią równość krócej:

$$2yy' - \frac{1}{x^2 + y} \cdot [2x + y'] = 0$$

i obliczamy z niej y':

$$2yy' - \frac{2x}{x^2+y} - \frac{y'}{x^2+y} = 0$$

$$2yy' - \frac{y'}{x^2+y} = \frac{2x}{x^2+y}$$

$$y'\left(2y - \frac{1}{x^2+y}\right) = \frac{2x}{x^2+y}$$

$$y' \cdot \frac{2yx^2+2y^2-1}{x^2+y} = \frac{2x}{x^2+y}$$

$$y' = \frac{2x}{2yx^2+2y^2-1}\ .$$

Wróćmy do równania różniczkowego:

$$L_{str.} = (2x^2y+2y^2-1)y' = (2x^2y+2y^2-1)\cdot\frac{2x}{2yx^2+2y^2-1} = 2x = P_{str.}\ ,$$

a więc dana rodzina krzywych spełnia dane równanie różniczkowe.

Zadanie A9. Po podzieleniu obu stron równania przez x^3 mamy:

$$y' + \frac{1}{x^3}y = (x+1)\cdot e^{1/(2x^2)}$$

i, jak widać, otrzymaliśmy równanie różniczkowe liniowe. Rozwiązujemy je.

Etap 1: Tworzymy równanie uproszczone:

$$y' + \frac{1}{x^3}y = 0$$

i rozwiązujemy je:

$$y' = -\frac{1}{x^3}y$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x^3}$$

$$\int \frac{y'}{y}\,dx = -\int \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$\int \frac{\frac{dy}{dx}}{y}\,dx = -\int \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = -\int \frac{1}{x^3}\,dx$$

$$\ln|y| + C_1 = \frac{1}{2x^2} + C_2$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2x^2} + C_3 \,.$$

Otrzymaliśmy rozwiązanie w postaci uwikłanej, przekształcimy ją do postaci funkcyjnej:

$$|y| = e^{\frac{1}{2x^2}+C_3}$$

$$|y| = e^{\frac{1}{2x^2}} \cdot e^{C_3}$$

$$|y| = e^{\frac{1}{2x^2}} \cdot C_4$$

$$y = C \cdot e^{\frac{1}{2x^2}} \,.$$

Otrzymaliśmy rozwiązanie ogólne równania uproszczonego w postaci funkcyjnej.

Etap 2.

$$y = C(x) \cdot e^{\frac{1}{2x^2}} \,,$$

Skąd

$$y' = C'(x) \cdot e^{\frac{1}{2x^2}} + C(x) \cdot e^{\frac{1}{2x^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)' = C'(x) \cdot e^{\frac{1}{2x^2}} - C(x) \cdot e^{\frac{1}{2x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Po podstawieniu do równania liniowego otrzymujemy:

$$C'(x) \cdot e^{\frac{1}{2x^2}} - C(x) \cdot e^{\frac{1}{2x^2}} \cdot \left(\frac{1}{x^3}\right) + \frac{1}{x^3} \cdot C(x) \cdot e^{\frac{1}{2x^2}} = (x+1) \cdot e^{\frac{1}{2x^2}} \,,$$

skąd otrzymujemy: $C'(x) \cdot e^{\frac{1}{2x^2}} = (x+1) \cdot e^{\frac{1}{2x^2}}$, a więc $C'(x) = x + 1$. Po scałkowaniu mamy: $C(x) = \int (x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} + x + A$. Zatem rozwiązanie ogólne równania liniowego ma postać:

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + x + A\right) \cdot e^{\frac{1}{2x^2}} \,.$$

Zadanie A10. Dane równanie różniczkowe (z uwagi np. na obecność y^2) nie jest równaniem liniowym. Aby rozpoznać jego typ, przekształcamy je:

$$(x^2 + 2yx)y' = 3xy + 2y^2,$$

$$y' = \frac{3xy + 2y^2}{x^2 + 2yx}$$

$$y' = \frac{x^2\left[3\cdot\frac{y}{x}+2\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]}{x^2\left(1+2\cdot\frac{y}{x}\right)}$$

$$y' = \frac{3\cdot\frac{y}{x}+2\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2}{1+2\cdot\frac{y}{x}} \ .$$

Otrzymaliśmy równanie jednorodne. Podstawiamy $t = \frac{y}{x}$, dokładniej, $t(x) = \frac{y(x)}{x}$, skąd

$y(x) = x \cdot t(x)$, a więc $y'(x) = t(x) + x \cdot t'(x)$ lub, krócej, $y = t + xt'$. Po wstawieniu do równania jednorodnego otrzymujemy:

$$t + xt' = \frac{3t + 2t^2}{1 + 2t}$$

$$xt' = \frac{3t + 2t^2}{1 + 2t} - t$$

$$xt' = \frac{2t}{1 + 2t}$$

$$t' = \frac{1}{x} \cdot \frac{2t}{1 + 2t}$$

$$\frac{2t + 1}{2t} \cdot t' = \frac{1}{x}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t}\right) \cdot t' = \frac{1}{x}$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t}\right) \cdot t' \, dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t}\right) \frac{dt}{dx} dx = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t}\right) dt = \int \frac{1}{x} dx$$

$$t + \frac{1}{2}\ln|t| + C_1 = \ln|x| + C_2$$

$$t + \frac{1}{2}\ln|t| = \ln|x| + C \ .$$

Ponieważ $t = \frac{y}{x}$, więc mamy rozwiązanie ogólne równania jednorodnego postaci (uwikłanej):

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + C \ .$$

Z uwagi na warunek początkowy $y(1) = 1$ wstawiamy do niego $x = 1$ oraz $y = 1$, otrzymując: $1 + \frac{1}{2}\ln|1| = \ln|1| + C$, skąd $C = 1$.

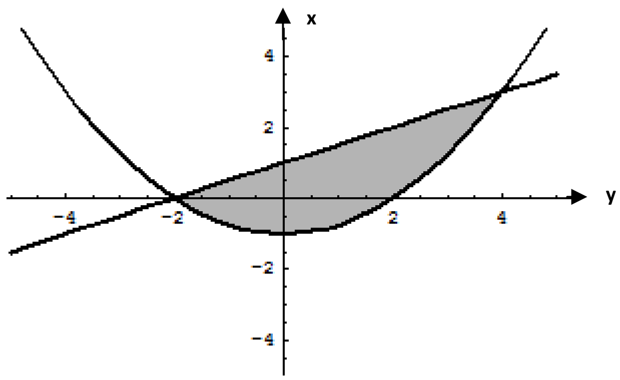
Zatem rozwiązanie szczególne, spełniające warunek $y(1) = 1$ ma postać (uwikłaną):

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + 1 .$$

Zadanie B1. a) $-\frac{1}{3}\cos(2 + 3\ln x) + C$, b) $-\frac{2x+1}{4}e^{-2x} + C$.

Zadanie B2. a) $-\frac{3}{2}$, b) $\frac{1}{2}$.

Zadanie B3. $S = 9$.



Zadanie B4. $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{\sqrt[5]{1+3x^2}}\,dx$ jest rozbieżna (podobnie jak i całka $\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[5]{1+3x^2}}\,dx$), a więc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt[5]{1+3x^2}}\,dx$ jest rozbieżna.

Zadanie B5. Jeżeli $F(x) = \int_x^{2x} \cos(\sin t)\ dt$, to $F'(x) = 2\cos(\sin 2x) - \cos(\sin x)$, zatem: $f'(x) = (\cos x) \cdot \int_x^{2x} \cos(\sin t)\ dt + (\sin x) \cdot [2\cos(\sin 2x) - \cos(\sin x)]$.

Zadanie B6. $z = \sqrt{x^3 + y^2}$, $dz(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+y^2}}(3x^2 \cdot \Delta x + 2y \cdot \Delta y)$, $\sqrt{(2{,}02)^3 + (0{,}97)^2} \approx 3{,}03$.

Zadanie B7. $z_{xx} = -y^4 \sin(xy^2)$, $z_y = 2xy\cos(xy^2)$, równość zachodzi .

Zadanie B8. $y' = -\frac{2xy\cos(x^2y)}{1+x^2\cos(x^2y)}$, dana rodzina krzywych spełnia dane równanie różniczkowe.

Zadanie B9. Dane równanie można zapisać w postaci:

$$y' + y \cdot \sin x = x \cdot e^{\cos x} \cdot \cos(x^2) ,$$

a więc jest to równanie różniczkowe liniowe. Rozwiązanie ogólne równania uproszczonego:

$\ln|y| = \cos x + C$ (postać uwikłana) lub $y = C \cdot e^{\cos x}$ (postać funkcyjna) . Po uzmiennieniu stałej mamy: $C'(x) = x \cdot \cos(x^2)$, skąd $C(x) = \frac{1}{2}\sin(x^2) + A$. Zatem rozwiązanie ogólne równania liniowego ma postać: $y = \left[\frac{1}{2}\sin(x^2) + A\right] \cdot e^{\cos x}$.

Zadanie B10. Dane równanie można doprowadzić do postaci: $y' = \frac{1}{y} \cdot \frac{x^2}{x+2}$, a więc jest to równanie o zmiennych rozdzielonych. Jego rozwiązaniem ogólnym jest:

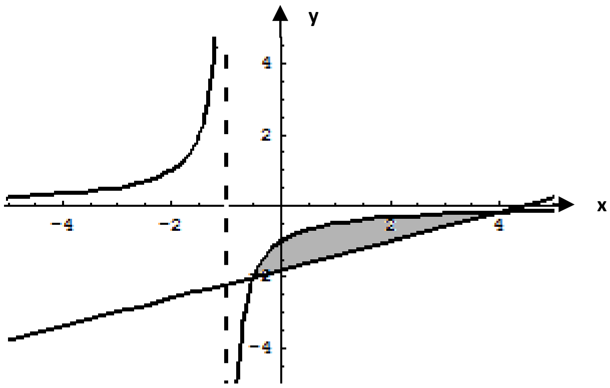
$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln|x+2| + C$ (postać uwikłana), zaś rozwiązaniem szczególnym, spełniającym podany warunek początkowy jest: $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln|x+2| - \frac{5}{2}$.

Zadanie C1. a) $\frac{x}{4} + \frac{1}{2^{x+1}\ln 2} - \frac{1}{4^{x+1}\ln 4} + C$,

b) $\frac{1}{3}\left[x^3\ln(x-1) - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - \ln|x-1|\right] + C$.

Zadanie C2. a) 2, b) $-\frac{\ln(2e-1)}{2}$.

Zadanie C3. $S = \frac{99}{20} - \ln 10$



Zadanie C4. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x\cdot(1+\ln^2 x)^3}\, dx = \frac{1}{4}$ (całka jest zbieżna).

Zadanie C5. a) $f'(x) = 3\,\mathrm{tg}(9x^2) - \frac{\mathrm{tg}\, x}{2\sqrt{x}}$, b) $y' = -\frac{2^x \ln 2}{1+2^y \ln 2}$.

Zadanie C6. $z_x = -\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}$, $z_y = \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}$, $z_{xx} = -\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y}$,

$z_{xy} = z_{yx} = \frac{1}{y^2}\left(\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right)$, $z_{yy} = -\frac{x}{y^3}\left(2\sin\frac{x}{y} + \frac{x}{y}\cos\frac{x}{y}\right)$.

Zadanie C7. Przyjmując $z = \ln(x^2 + y)$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}02$, $y_0 = 1$, $\Delta y = -0{,}01$ mamy: $dz(x,y) = \frac{1}{x^2+y}(2x \cdot \Delta x + \Delta y)$, skąd $\ln[(0{,}02)^2 + 0{,}99] \approx -0{,}01$.

Zadanie C8. Tak .

Zadanie C9. Dane równanie można przekształcić do postaci: $y' = \frac{y^2+1}{y} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{x}}$, więc jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, którego rozwiązanie ogólne ma postać (uwikłaną):

$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = 2\left(\sqrt{x} - \ln\left|1+\sqrt{x}\right|\right) + C$.

Zadanie C10. Po przekształceniu danego równania do postaci $y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ stwierdzamy, że jest to równanie liniowe. Rozwiązanie ogólne równania uproszczonego jest postaci:

$\ln|y| = -2\ln|x| + C$ (postać uwikłana) lub $y = \frac{C}{x^2}$ (postać funkcyjna). Po uzmiennieniu stałej otrzymujemy $C'(x) = x \cdot \sin x$, skąd $C(x) = \sin x - x\cos x + A$. Tak więc rozwiązanie ogólne równania liniowego ma postać: $y = \frac{\sin x - x\cos x + A}{x^2}$. Rozwiązanie szczególne, spełniające podany warunek początkowy ma postać: $y = \frac{\sin x - x\cos x - 1}{x^2}$.